Vordiplom Mathe für Informatiker bei Prof. Růžička

11. Oktober 2000

Allgemeines

Prüfer war *Prof. Růžička*, Beisitzer war Lars Diening. Die Prüfung fand morgens um neun statt. Geprüft wurden (in Klammern verwendetes Material)

- Analysis I und II (Schneider-Skript)
- DAS (Flum-Skript, Aigner)
- Lineare Algebra I (Růžička-Mitschrieb, kaum Fischer)

Die Vorbereitung dauerte etwa dreieinhalb Wochen bei entspannter Wochenstundenzahl.

Prüfung

- Fangen wir an... Was ist eine Gruppe? — (schreibe Axiome auf)
- Und was ist eine Untergruppe? — eine Teilmenge, die bezüglich der Gruppen-Operation abgeschlossen ist.
- Und was ist dann die Faktorgruppe bezüglich dieser Untergruppe (genaue Frage entfallen)? — Untergruppe induziert Äquivalenzrelation, dann Menge der Äquivalenzklassen.
- Und wie kann man dann daraus eine Gruppe machen? — Operation auf Äquivalenzklassen definieren, Repräsentantenunabhängigkeit wichtig.
- Was ist ein Körper? — Komm. Gruppe bzgl. Addition, ohne 0 Gruppe bzgl. Multiplikation.
- Und was noch? — $1 \neq 0$.

- Und was noch? ...Wie Addition und Multiplikation zusammenhängen? — Distributivität natürlich auch noch.
- Wie kommt man nun vom Körper zu den reellen Zahlen? — Erstmal Anordnungsaxiome einführen, Vergleichbarkeit (hinschreib) und Monotonie der Addition und Multiplikation. (Addition hinschreib). Dann Vollständigkeitsaxiom, wahlweise das mit Cauchy-Folgen, mit kleinster Oberer Schranke oder mit Intervallschachtelung.
- Was heißt "abzählbar"? — Menge abzählbar, wenn man die Natürlichen auf sie surjektiv abbilden kann.
- Beispiele für abzählbare Mengen? — $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
- Und für überabzählbare Mengen? — $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Können Sie das für $\mathbb{R}$ beweisen? — Mit dem Diagonalenargument oder mit Intervallschachtelung. Versuch, alle Reellen aufzulisten, Diagonale bauen, nicht drin.
- Das geht aber für $\mathbb{Q}$ auch. — Hmm, ja... zeig ich's doch lieber mit Intervallschachtelung. (Schachtelung hinschreib) Nach Vollständigkeitsaxiom ist in der Mitte noch eine reelle Zahl.
- Was für Intervalle? — Mit abgeschlossenen geht es, mit offenen... fällt mir kein Gegenbeispiel ein. (Růžička gibt Beispiel $(0, \frac{1}{n})$). Da geht es natürlich nicht.
- Kommen wir zu *Analysis*. Was heißt denn stetig, genauer, wann ist f stetig in x_0? — Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (das reicht völlig, meint er), dann bla-ε-δ (hinschreib).
- Negieren Sie das mal. — (negier).
- Was ist gleichmäßig stetig? — Wenn man das δ von x unabhängig wählen kann.
- Was fällt ihnen zu stetigen Funktionen auf Intervallen ein? — Wenn das Intervall abgeschlossen ist, ist es kompakt, f nimmt Maximum und ein Minimum an, f gleichmäßig stetig.
- Und? — Das Bild ist wieder kompakt.
- Wie beweisen Sie das, nur die Idee? — Mit Heine-Borel, Bild mit ε-Kugeln abdecken, dann kann man das Urbild mit den passenden δ-Kugeln abdecken.
- Warum geht das? — Weil jeder Bildpunkt irgendwo ein Urbild haben muß und das ist dann in einer der δ-Kugeln. Jedenfalls dann endliche Teilüberdeckung, die endliche Teilüberdeckung des Bildes liefert.

- Was ist eine Richtungsableitung? — (Definition von $f(X_0; E)$ hinschreib) Und die partiellen Ableitungen sind dann die mit hier Standardbasisvektoren.
- Wie kann man sich das im $\mathbb{R}^n$ vorstellen? — Äh...?
- Wie kann man sich denn die Ableitung bei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vorstellen? — Ach so, als Steigung der Tangente in Richtung von E.
- Wenn alle partiellen Ableitungen existieren, ist f dann stetig? — Wenn sie stetig sind, ist f sogar diffbar...
- Und wenn sie nur existieren? — Hmm.... (mal ein paar Richtungen in den $\mathbb{R}^2$ des Papiers)
- Es geht sogar, wenn alle Richtungsableitungen existieren. — (Schlauchsteh)
- Nun, die sind alle gerade... — Ah! So entlang (parabelmal) kann f immer noch unstetig sein, obwohl alle Richtungsableitungen existieren.
- Kommen wir zur *Linearen Algebra*. Wann ist denn das GS $Ax = b$ lösbar? — Wenn b im Spaltenraum von A ist...
- Ja, wie würden Sie das lösen? — Zeilenstufenform, lösbar gdw keine Zeilen links nur Nullen und rechts keine Null haben.
- Und die Anzahl der Lösungen? — (Matrix hinmal) Die nichtausgeräumten Spalten, Lösung des homogenen Systems, jede Lösung Summe einer speziellen und einer des homogenen GS, also mit $\dim L_H(A) = n - r$ ... (so TIMTOWDI, daß ich mich leicht verheddere)
- Danke, das war's dann.

Fazit

Die Atmosphäre war angenehm und freundlich. Die Fragen waren verständlich und ich bekam Hilfestellungen, als ich auf dem Schlauch stand. Man gab mir "sehr gut".